PI4.147r Equações de planos (II)

1. Determinar as equações do plano que contém os pontos A = (2, −1, 2), B = (2, 2, −1) e C = (0, 1, 1).

Escolha de dois vetores do plano: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0; 3; -3) \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-2; 2; -1)$

$$X = A + \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} \leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (2;\ -1;\ 2) + \alpha.(0; 3; -3) + \beta.(-2; 2; -1) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (2 - 2\beta;\ -1 + 3\alpha + 2\beta;\ 2 - 3\alpha - \beta)$$

Esta é a equação paramétrica do plano. Processo expedito para obter a equação geral:

i) determinamos o produto vetorial dos dois vetores do plano:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2.v_3 - u_3.v_2; u_3.v_1 - u_1.v_3; u_1.v_2 - u_2.v_1) = (3; 6; 6)$$

ii) Este vetor $\vec{n} = (3; 6; 6)$ é um vetor normal ao plano. A equação geral do plano será da forma $3x + 6y + 6z = d$

iii) Para encontrar a constante ***d***, substituímos ***x***, ***y*** e ***z*** pelas coordenadas de qualquer um dos pontos conhecido do plano. Escolhendo **C = (0; 1; 1)**, vem:

$$3 \times 0 + 6 \times 1 + 6 \times 1 = d \quad \leftrightarrow \quad d = 12$$

A equação geral do plano será: $3x + 6y + 6z = 12 \quad \leftrightarrow \quad x + 2y + 2z - 4 = 0$

2. Determinar a equação do plano (α) que contém o ponto A(1;1;1) e admite ***n*** = (2; 0; -3) como vetor normal.

A equação geral de um plano é $Ax + By + Cz + D = 0$ sendo (A; B; C) as coordenadas de um vetor normal ao plano. Assim:

$$(\alpha):\ \ 2x + 0.y - 3z + D = 0$$

O valor de D obtém-se com a ajuda do ponto A: $2 \times 1 + 0 \times 1 - 3 \times 1 + D = 0 \leftrightarrow D = 1$

Finalmente:

$$(\alpha):\ \ 2x - 3z + 1 = 0$$

3. Determinar a equação do plano (∝) que contém os pontos A(1;1;1), B(1,-1;-1) e C(3;2;1).

Precisamos de um ponto e de um vetor normal. O ponto poderá ser A(1;1;1); Para obter o vetor normal utilizaremos o produto vetorial de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (0; -2; -2); \qquad \overrightarrow{AC} = (2; 1; 0)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2; -4; 4)$$

$$(\alpha):\ \ 2x - 4y + 4z + D = 0$$

O valor de D obtém-se com a ajuda do ponto A: $2 \times 1 - 4 \times 1 + 4 \times 1 + D = 0 \leftrightarrow D = -2$

Finalmente:

$$(\alpha):\ \ 2x - 4y + 4z - 2 = 0$$