PI4.136r Aplicações do produto vetorial (I)

1. Determinar a área do paralelogramo de vértices A(1,1,1), B(3,4,1), C(0,2,5) e D(2,5,5).

Considerando como lados consecutivos [AB] e [AC]: $\overrightarrow{AB} = (2,3,0)$; $\overrightarrow{AC} = (-1,1,4)$

A área do paralelogramo é dada por: $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (x_2y_3 - x_3y_2;\ x_3y_1 - x_1y_3;\ x_1y_2 - x_2y_1) =$$
$$= \big(3 \times 4 - 0 \times 1;\ -1 \times 0 - 2 \times 4;\ 2 \times 1 - 3 \times (-1)\big) = (12; -8; 5)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{12^2 + (-8)^2 + 5^2} = \sqrt{233}$$

2. Determinar a área do triângulo de vértices A(1,0,1), B(-1,4,1), C(0,2,2).

Considerando os lados [AB] e [AC]: $\overrightarrow{AB} = (-2,4,0)$; $\overrightarrow{AC} = (-1,2,1)$

A área do triângulo é dada por: $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$:2

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (x_2y_3 - x_3y_2;\ x_3y_1 - x_1y_3;\ x_1y_2 - x_2y_1) =$$
$$= \big(4 \times 1 - 0 \times 2;\ 0 \times (-1) - (-2) \times 1; (-2) \times 2 - 4 \times (-1)\big) = (4; 2; 0)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

$\text{Área}_{[ABC]} = \sqrt{20} : 2 = \sqrt{5}$

3. Usando o produto vetorial, determinar o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ sendo A(1,0,1), B(-1,4,1), C(0,2,2).

Considerando os lados [AB] e [AC]: $\overrightarrow{AB} = (-2,4,0)$; $\overrightarrow{AC} = (-1,2,1)$

O ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é dado por $\sin\theta = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\| . \|\overrightarrow{AC}\|}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (x_2y_3 - x_3y_2;\ x_3y_1 - x_1y_3;\ x_1y_2 - x_2y_1) =$$
$$= \big(4 \times 1 - 0 \times 2;\ 0 \times (-1) - (-2) \times 1; (-2) \times 2 - 4 \times (-1)\big) = (4; 2; 0)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{20}$; $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{6}$;

$\sin\theta = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\| . \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20} . \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ =24.1º