PI4.133r Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ângulo entre dois vetores (II)

O valor absoluto do produto escalar de dois vetores **u** e **v** é menor ou igual que o produto das respetivas normas:

$$|\vec{u}\,.\,\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\| \text{ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)}$$

Se os vetores **u** e **v** forem não nulos, temos: $\frac{|\vec{u}\,.\vec{v}\,|}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|} \leq 1 \;\leftrightarrow\; -1 \leq \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|} \leq 1$

Chamamos ângulo entre os dois vetores **u** e **v** ao valor θ pertencente a [0; π] tal que $\frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}$ = cos θ.

1. Determinar o ângulo θ entre os vetores **u** = (1; 0) e **v** = (-3; 3).

$$\boldsymbol{\cos\theta} = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{1\times(-3)+0\times 3}{\sqrt{1^2+\,0^2}\,.\sqrt{(-3)^2+\,3^2}} = \frac{-3}{\sqrt{1}.\sqrt{18}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^o$$

Nota: A função cosseno é positiva para ângulos agudos e negativa para ângulos obtusos.

2. Determinar o ângulo θ entre os vetores **u** = (2; 3; 0) e **v** = (-1; 1; 4).

$$\boldsymbol{\cos\theta} = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{2\times(-1)+3\times 1+0\times 4}{\sqrt{2^2+\,3^2+\,0^2}\,.\sqrt{(-1)^2+\,1^2+\,4^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}.\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{234}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{234}}\right) = 86{,}3^o$$

3. Determinar o ângulo θ entre os vetores **u** = (6; 5; 0) e **v** = (3; 0; 2).

$$\boldsymbol{\cos\theta} = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{6\times 3+5\times 0+0\times 2}{\sqrt{6^2+\,5^2+\,0^2}\,.\sqrt{3^2+\,0^2+\,2^2}} = \frac{18}{\sqrt{61}.\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{793}} = 0{,}64$$

$$\theta = \cos^{-1}0{,}64 = 50{,}1^o$$