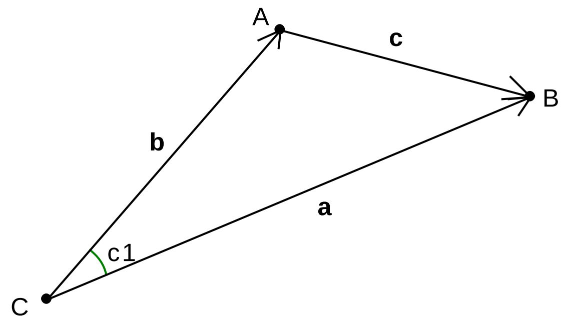
PI4.128r Aplicações do produto escalar de vetores (I)

1. Com a ajuda da figura ao lado, provar que:

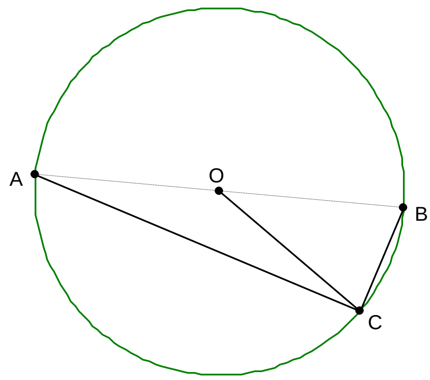
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos(c_1)$$

(lei dos cossenos da trigonometria)



$$\begin{aligned} c^2 = |\vec{c}|^2 = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 &= \left(\vec{a}-\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right) \\ &= \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} - 2\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\ \cos(c_1) \end{aligned}$$

2. Com a ajuda da figura ao lado, provar que o ângulo ACB inscrito num semicírculo é reto.



$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right).\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\right) \\ &= \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC} \\ &= -r^2 + \overrightarrow{OC}.\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}\right) + r^2 = -r^2 + \overrightarrow{OC}.\vec{0} + r^2 = 0 \end{aligned}$$

Como é nulo, os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ são perpendiculares e o ângulo ACB é reto.

3. Determinar os vetores unitários perpendiculares aos vetores $\vec{u} = (1; 1, 0)$ e $\vec{v} = (0: 1; 1)$.

Procuramos vetores $\vec{w} = (x; y; z)$ tais que $\|\vec{w}\| = 1$ e $\vec{w}.\vec{u} = 0$ e $\vec{w}.\vec{v} = 0$.

$\|\vec{w}\| = 1 \leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$ [1]

$\vec{w}.\vec{u} = 0 \leftrightarrow x + y = 0$ [2]

$\vec{w}.\vec{v} = 0 \leftrightarrow z + y = 0$ [3]

De [2] e de [3] vê-se que $x = z = -y$.

Substituindo em [1]: $y^2 + y^2 + y^2 = 1 \leftrightarrow y^2 = \frac{1}{3} \leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Temos duas soluções: $\overrightarrow{w_1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\overrightarrow{w_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.